Nuevo procedimiento para la determinación del área correspondiente a la curva pseudo – astroide

1914

Como quiera que el procedimiento indicado en el núm. 28 de la Revista de la Sociedad Matemática Española para la determinación del área correspondiente a la curva pseudo-astroide procura solo un valor aproximado por exceso, según me manifestó en atenta carta el distinguido matemático Sr. Teixeira, ello fue motivo para que luego hallara un nuevo procedimiento sencillo y notable para la determinación de dicha área, considerando un deber darlo a conocer a los lectores de la REVISTA DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA.

Partiremos de la fórmula del núm. 28 de la presente Revista:

$$A=\frac{R^2}{6}\int\frac{dt}{\operatorname{sen}^4 t-\operatorname{sen}^2 t+\frac{\mathrm{I}}{3}}$$

la cual permite las reducciones siguientes:

$$\begin{aligned}A&=\frac{R^2}{6}\int\frac{dt}{\frac{\mathrm{I}}{3}+\operatorname{sen}^2 t\left(\operatorname{sen}^2 t-\mathrm{I}\right)}=\frac{R^2}{6}\int\frac{dt}{\frac{\mathrm{I}}{3}-\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t}=\\&=\frac{R^2}{6}\int\frac{dt}{\frac{\mathrm{I}}{3}-\frac{\left(\operatorname{sen}^2 t\right)^2}{4}}=\frac{R^2}{6}\,\frac{\mathrm{I}}{2}\int\frac{2dt}{\left(\frac{\mathrm{I}}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{I}}{2}\right)^2\left(\operatorname{sen}^2 t\right)^2}\end{aligned}\qquad(\alpha)$$

Esta última integral cabe compararla con la general siguiente:

$$\frac{\mathrm{I}}{2}\int\frac{2dt}{a^2-b^2\operatorname{sen}^2 2t}$$

siendo

$$a=\frac{\mathrm{I}}{\sqrt{3}},\qquad b=\frac{\mathrm{I}}{2},\qquad a>b$$

y en el supuesto de $b=a\cos\beta$, se tiene:

$$\frac{I}{2}\int \frac{2dt}{a^2\left(\operatorname{sen}^2 2t+\cos^2 2t\right)-b^2\operatorname{sen}^2 2t}=\frac{I}{2}\int\frac{2dt}{a^2\cos^2 2t+\left(a^2-b^2\right)\operatorname{sen}^2 2t}=$$

$$=\frac{I}{2}\int\frac{2dt}{a^2\cos^2 2t+a^2\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2 2t}=-\frac{I}{2}\int\frac{-\dfrac{2dt}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}^2 2t}}{a^2\operatorname{sen}\beta\left[I+\left(\dfrac{\cos 2t}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}2t}\right)^2\right]}=-\frac{I}{2}\frac{I}{a^2\operatorname{sen}\beta}\operatorname{arctg}\frac{\cot 2t}{\operatorname{sen}\beta}$$

Según indicamos en el núm. 28 de esta Revista, los límites de t son $0 \text{ y } \frac{\pi}{4}$; luego la integral anterior da:

$$\frac{I}{2}\frac{I}{a^2\operatorname{sen}\beta}\frac{\pi}{2}$$

Ahora se tiene

$$a^2=\frac{I}{3} \qquad \operatorname{sen}\beta=\sqrt{I-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{I-\frac{\frac{I}{4}}{\frac{I}{3}}}=\sqrt{\frac{I}{4}}=\frac{I}{2}$$

Así, pues,

$$\frac{I}{2}\frac{I}{a^2\operatorname{sen}\beta}\frac{\pi}{2}=\frac{I}{2}\frac{I}{\frac{I}{3}\frac{I}{2}}\frac{\pi}{2}=3\frac{\pi}{2}$$

Luego, según α se obtiene definitivamente

$$A=\frac{R^2}{6}3\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}R^2=0{,}78......R^2$$

El valor hallado por el otro procedimiento del núm. 28, conforme a la fórmula

$$A=\frac{I}{2}\left(I+\frac{\pi}{3}\right)R^2=1{,}0......R^2$$

como es de ver, da el valor por exceso, siendo el anterior el verdadero y notable por la relación de áreas que puede establecerse según las líneas consideradas en el estudio anterior de la ***pseudo-astroide***.

Barcelona, 27 de Julio de 1914
Lauro Clariana Ricart