Gaceta de Matemáticas. Año 1905. Pág.194-196

*M. Alf. Guldberg.- Sur les équations linéaires aux differences finies. Extracto de los Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. Tomo XXI, 1905.*

De sumo interés debe considerarse, para los que se dedican al análisis superior de la Matemática, el conocer los notables y múltiples trabajos que, dentro de la ciencia de la cantidad, realiza el insigne matemático noruego M. Alf. Guldberg pues en ellos puede apreciarse de modo ostensible la evolución portentosa que se opera en nuestros tiempos, al pretender generalizar el cálculo integral, siendo digno de mención, entre las producciones de este matemático, dos memorias últimamente publicadas. las cuales tienen por objeto relacionar las integrales diferenciales lineales con las que el autor denomina *ecuaciones lineales de las diferencias finitas.*

En dos memorias divide M. Guldberg su trabajo: en la primera trata de generalidades acerca de las ecuaciones lineales de las diferencias finitas; luego, en la segunda, manifiesta la íntima relación que existe entre éstas y la célebre teoría de MM. Picard y Vessiot.

En dos capítulos divide la primera memoria, manifestando antes del primer capítulo, como por vía de prefacio, las diversas investigaciones realizadas sobre este punto por Taylor, Lagrange, Cauchy, Brisson, llegando así a los principios de MM. Casorati, Pincherle y Heyman, acerca de las integrales que forman un sistema fundamental de una ecuación diferencial, para hacerlo extensivo luego a una ecuación lineal de las diferencias finitas.

Empero, sabido es que, a medida que se extiende el círculo de acción en la ciencia, cada vez más se multiplican los conceptos que la integran; por esto, sin duda, el infatigable M. Guldberg, al continuar con sus comparaciones, llegó a recabar nuevas orientaciones dentro de las integrales lineales de las diferencias finitas, hallando armonías con el análisis ordinario respecto a las *Funciones invariantes o simétricas.*

Bien podríamos afirmar que esta idea lleva al autor a formular un teorema fundamental, que constituye la base de su primer capitulo.

Este teorema recuerda, mediante las transformaciones lineales, el análisis ordinario respecto a las formas invariantes, con solo cambiar en integrales los elementos de la matriz correspondiente, y en el supuesto de que dicha matriz no se anule, para poder discutir debidamente tres casos que resultan al comparar el número de integrales fundamentales con el orden de la ecuación integral a que se refiere, todo conforme según los teoremas de M. Appell.

Dos aplicaciones interesantes dan fin al primer capitulo; en la primera hállase la condición necesaria y suficiente para que dos ecuaciones lineales de las diferencias finitas, tengan una integral común; en la segunda tratase de formar la ecuación lineal que admita a la vez las integrales de dos ecuaciones lineales dadas.

A esto sigue inmediatamente el segundo capitulo, el cual tiene por objeto: dado un sistema fundamental de integrales de una cierta ecuación:

$$\sum_{K=0}^{K=n} y\, a_{x+n-K}^{(K)} = 0$$

y una función algebraica entera de las integrales fundamentales y de sus valores sucesivos, formar una ecuación lineal de las diferencias finitas que admita por integral la última función indicada.

Estos conocimientos sirven como de base para dar desarrollo a la segunda memoria, la cual el autor divide en tres capítulos.

Mas al primero precede una proposición fundamental que le sirve de base, y que puede formularse en los términos siguientes: A toda ecuación lineal de las diferencias finitas de orden *n*, corresponde un grupo (G), continuo y finito de transformaciones lineales homogéneas con *n* variables, el cual goza de dos propiedades que guardan relación con funciones racionales enlazadas con las transformaciones del grupo (G).

De esa suerte llega M. Guldberg a la importante teoría de las sustituciones, que suelen indicarse por (S), demostrando que un grupo continuo de transformaciones en las ecuaciones lineales de las diferencias finitas, sigue una ley análoga a la que corresponde, según Picard, con las ecuaciones diferenciales, obteniendo así, por fin, dos consecuencias sumamente importantes.

Respecto al segundo capitulo, manifiesta que en la reducción del grupo de transformaciones, puede desarrollarse una teoría análoga a la de M. Vessiot, al tratar éste de las ecuaciones diferenciales lineales. Así es como, después de varias consideraciones, prueba M. Guldberg que el último grupo es inavariante en el grupo inicial (G).

Más al aplicar los principios anteriores para hallar las ecuaciones lineales a las diferencias finitas integrables por *cuadraturas finitas*, deduce que «*si una ecuación lineal de las diferencias finitas, es integrable por cuadraturas finitas, su grupo de transformación es integrable*», cuyo teorema le permite pasar luego a la demostración de su recíproco.

Por último, en el tercer capítulo indica que la teoría general de las ecuaciones lineales de orden *n*, comprende la resolución de tres problemas, dando una idea breve de ellos, para terminar con una aplicación a una ecuación lineal de segundo orden.

Los lectores de la Gaceta de Matemáticas, después de esta sencilla y rápida reseña, podrán formarse idea siquiera del fin fecundo e interesante que ha guiado a dicho matemático al escribir las precitadas Memorias en forma de extracto, deplorando, no obstante, que estos trabajos no se publiquen con todos los detalles y demostraciones completas, para que se pudieran apreciar mejor los altos conceptos que, inteligencias privilegiadas como la de M. Guldberg, se proponen dar a conocer.

Lauro Clariana Ricart